$E/\sim$ = σύνολο όλων των κλάσεων που φτιάχνω μέσα στο σύνολο

$E/\sim = \{ \kappa\lambda_\sigma(x) : x \in E \}$ σύνολο πηλίκο

$\mathbb{N}/\sigma = \{ \{1, 4, 7, 10, \dots\}, \{2, 5, 8, 11, \dots\}, \{3, 6, 9, 12, \dots\} \}$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $\sim$ μια ισοδυναμία σ' ένα σύνολο E

Τότε το σύνολο πηλίκο $E/\sim$ είναι

μια διαμέριση του E

Ακόμη, αν $\mathcal{C}$ είναι μια διαμέριση ενός συνόλου E τότε $\exists$ ισοδυναμία $\sim$ στο E ~~τε~~ τέτοια ώστε $E_\sim = \mathcal{C}$

<u>Απόδ</u>

1) Έστω $\sim$ ισοδυναμία στο E και $E/\sim$ είναι το σύνολο πηλίκο του $\sim$

$(\forall x \in E)\ x \in K\lambda_\sim(x) \neq \emptyset$

Εάν $\mathcal{C}$ διαμέριση του E

$x \sigma w \longleftrightarrow (\exists X \in \mathcal{C})\, x \in X \wedge w \in X$

ανακλαστική, συμμετρική

$x \sigma y \wedge y \sigma z \Rightarrow$

$[(\exists X \in \mathcal{C})\, x \in X \wedge y \in X]$
$\wedge$
$[(\exists Y \in \mathcal{C})\, y \in Y \wedge z \in Y]$

Παρατηρούμε ότι $y \in X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow X = Y$

Έτσι $x \in X \wedge z \in Y = X \Rightarrow$
$x \sigma z$

<u>Θ.δ.ο</u>

$E/\sim = \mathcal{C}$ Άρκα ν.δ.ο $\mathcal{C} \subseteq E/\sim$

$X \in \mathcal{C}$ κ' $a \in X \neq \varnothing$

$x \in X \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in κλ_\sim(a)$

Άρα $X \subseteq κλ_\sim(a)$

<u>Διατάξεις</u>

E, σ σχέση
σ διάταξη (μερική διάταξη) $\Leftrightarrow$
σ ανακλαστική, αντισυμμετρική μεταβατι-
κή
$\preceq$ = σχέση διάταξης
$a \leq B \Leftrightarrow (a, B) \in \preceq$
$(a, B) \in \preceq \Leftrightarrow B \geq a$

$a < B \Leftrightarrow a \leq B \wedge a \neq B$

$(B > a)$
$(E, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο

$(\mathbb{R}, \leq)$ $(\mathbb{Z}, \leq)$ $(\mathbb{N}, \leq)$

$\leq$ ολική ή γραμμική στο E $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{ \forall x, y \in E \}$ ισχύει

$(x \leq y$ ή $y \leq x)$

$x \sigma y \Rightarrow x$ διαιρεί τον y

$3 \not\sigma 7$ μη γραμμική

Έστω $\leq$ μια διάταξη σ' ένα σύνολο E
ν.δ.ο η $\leq^{-1}$ είναι επίσης διάταξη στο E.

$\boxed{x \leq^{-1} y \Leftrightarrow (x, y) \in \leq^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \leq \Leftrightarrow y \leq x}$

$x \in E$ τότε $(x, x) \in \leq \Leftrightarrow (x, x) \in \leq^{-1} \Leftrightarrow x \leq^{-1} x$

$x \leq^{-1} y \wedge y \leq^{-1} x$
$\Leftrightarrow y \leq x \wedge x \leq y \xRightarrow{\leq \text{ αντισ}} x = y$

$x \leq^{-1} y \wedge y \leq^{-1} z \Leftrightarrow y \leq x \wedge z \leq y$
$\Leftrightarrow z \leq y \wedge y \leq x \xRightarrow{\text{μεταβ}} z \leq x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq^{-1} z$

$(E, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο. $A \subseteq E$
- $a \in E$, a άνω φράγμα του A $\Leftrightarrow$

$(\forall x \in A)\ x \leq \alpha$

• $\beta \in E$, β κάτω φράγμα του $A \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ \beta \leq x$

<u>ΠΡΟΤ</u>

Υπάρχει το πολύ ένα άνω (κάτω) φράγμα α ενός συνόλου A με $\alpha \in A$

<u>Απόδ</u>

Ας είναι α, β άνω φράγματα του A, με $\alpha \in A$ κ $\beta \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ άνω φράγμα του } A \overset{\beta \in A}{\Longrightarrow} \beta \leq \alpha \\ \beta \text{ " " " } A \overset{\alpha \in A}{\Longrightarrow} \alpha \leq \beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\overset{\leq \text{ αντισυμ}}{\Longrightarrow} \beta = \alpha$

→ Μέγιστο ενός συνόλου λέγεται ένα άνω φράγμα του συνόλου όταν ανήκει στο σύνολο

$\max A = \alpha \Leftrightarrow \alpha$ άνω φράγμα του A κ $\alpha \in A$

$\min A = \beta \Leftrightarrow \beta$ κάτω φράγμα του A κ $\beta \in A$

$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \alpha$ είναι το ελάχιστο των (άνω) συνόλου των άνω φραγμάτων

$B = \inf A \iff B$ είναι το μέγιστο (max) του συνόλου των κάτω φραγμάτων του A

Το $\sup A$ είναι άνω φράγμα
(Δηλαδή ισχύει: $(\forall x \in A)\ x \leq \sup A$)

Το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα
(Δηλαδή ισχύει: $(\forall x \in A)\ \inf A \leq x$)

$(\mathbb{R}, \leq)\quad x \leq y \iff y - x \geq 0$

$A = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

$[1, +\infty)$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A
$\min [1, \infty) = 1 = \sup A$

$(-\infty, 0]$ σύνολο κάτω φράγμα του A,
$0 = \max(-\infty, 0]$ Άρα $0 = \inf A \Rightarrow$
$\overset{0 \in A}{\Rightarrow} 0 = \inf A = \min A$

$E = \{9, 3, 12, 15, 18\}$

$x \leq y \Leftrightarrow x$ διαιρεί το y

$A = \{2, 3\}$

$2 \leq z$

$3 \leq z$

Σύνολο των άνω φραγμάτων του A στο E
είναι το $\{12, 18\}$

Άσκηση

1) σ διμελής σχέση στο E

Ν.δ.ο η $\sigma \cup \sigma^{-1}$ είναι συμμετρική σχέση κ' μάλιστα, η ελάχιστη (ως προς τη διάταξη) συμμετρική σχέση που περιέχει την σ.

$\sigma \subseteq \sigma \cup \sigma^{-1}$ (Α' τρόπος)

σ συμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

$(\sigma \cup \sigma^{-1})^{-1} = \sigma^{-1} \cup (\sigma^{-1})^{-1} = \sigma^{-1} \cup \sigma = \sigma \cup \sigma^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma \cup \sigma^{-1}$ συμμετρική

(Β τρόπος)

- Άσκηση $(y, x) \in \sigma$ δ.ο $(x, y) \in \sigma$

$A = \{\rho : \rho$ συμμετρική κ $\sigma \subseteq \rho\}$

ν.δ.ο $\sigma \cup \sigma^{-1} = \min \Lambda$

$\sigma \cup \sigma^{-1} \in \Lambda$ Ισχύει γιατί $\sigma \cup \sigma^{-1}$ συμμετρική κ' $\sigma \subseteq \sigma \cup \sigma^{-1}$

Έστω ρ τυχαίο στοιχείο της Λ
τότε ρ συμμετρική σχέση και $\sigma \subseteq \rho$
τότε $\sigma^{-1} \subseteq \rho^{-1} = \rho$ (ρ συμμετρικό)

Άρα $\sigma \cup \sigma^{-1} \subseteq \rho \cup \rho = \rho$

2) σ, r σχέσεις ισοδ. στο E
ν.δ.ο
$\sigma \cap r$ ισοδυναμία στο E
κ' ότι για τυχόν $x \in E$ ισχύει
$\kappa\lambda_{\sigma \cap r}(x) = \kappa\lambda_\sigma(x) \cap \kappa\lambda_r(x)$

y τυχόν
$y \in \kappa\lambda_{\sigma \cap r}(x) \Leftrightarrow y \; \sigma \cap r \; x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y, x) \in \sigma \cap r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y, x) \in \sigma \wedge (y, x) \in r$
$\Leftrightarrow y \sigma x \wedge y r x \Leftrightarrow y \in \kappa\lambda_\sigma(x)$
$\wedge\, y \in \kappa\lambda_r(x) \Leftrightarrow y \in \kappa\lambda_\sigma(x) \cap \kappa\lambda_r(x)$